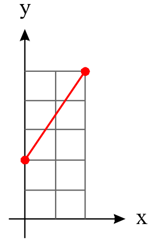
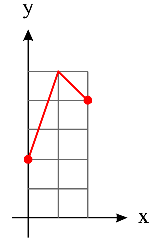
پاسخ‌نامه تشریحی

۱

الف)



ب)



۲ خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است، پس داریم:

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳(۲)-۴(-۱)+\circ|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱\circ}{۵}\rightarrow R=۲$$

۳

الف) $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۴-(-۲))^۲+(۷-۳)^۲}=\sqrt{۳۶+۱۶}=\sqrt{۵۲}$

$\rightarrow AB=\sqrt{۴\times ۱۳}\rightarrow AB=۲\sqrt{۱۳}\ ,\ \ AB=۲R\rightarrow\ ۲R=۲\sqrt{۱۳}\rightarrow \boxed{R=\sqrt{۱۳}}$

$$\left.\begin{array}{l} x_O=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{۴+(-۲)}{۲}=۱ \\ y_O=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{۷+۳}{۲}=۵ \end{array}\right\}\rightarrow \boxed{O(۱,۵)_{\text{مرکز دایره}}}$$

ب) $OC=\sqrt{(x_O-x_C)^۲+(y_O-y_C)^۲}=\sqrt{(۱-(-۱))^۲+(۵-۸)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$

$OC=\sqrt{۱۳}\rightarrow OC=R\rightarrow$ نقطهٔ C روی محیط دایره قرار دارد

۴

الف) $L:۲x+y=۵\rightarrow ۲x+y-۵=\circ$

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲(۷)+۱(-۴)-۵|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}\rightarrow d=\sqrt{۵}$$

ب) $T:x=۵\rightarrow x-۵=\circ$

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱(۷)+\circ(-۴)-۵|}{\sqrt{۱^۲+\circ^۲}}=\frac{۲}{۱}\rightarrow d=۲$$

پ) $\Delta:y=\circ$

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|\circ\times ۷+۱(-۴)+\circ|}{\sqrt{\circ+۱^۲}}=\frac{۴}{۱}\rightarrow d=۴$$

۵

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}\rightarrow \begin{cases} ۲+۱=-۱+x_D \\ ۳-۲=\circ+y_D \end{cases}\rightarrow \begin{cases} x_D=۴ \\ y_D=۱ \end{cases}\rightarrow D(۴,۱)$$

۶

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۱-۲)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۱+۹}\rightarrow AB=\sqrt{۱\circ}$$
$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(۱-۴)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۹+۱}\rightarrow AC=\sqrt{۱\circ}$$
$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}=\sqrt{(۲-۴)^۲+(۵-۱)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}\rightarrow BC=\sqrt{۲\circ}$$

$AB = AC \quad , \quad AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow$ متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه $= \overset{\Delta}{ABC}$

۷

$$\tan\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{\cot\theta = 2}$$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \rightarrow 1 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} \rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2\theta} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\rightarrow \cos^2\theta = \frac{4}{5} \rightarrow \boxed{\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} \rightarrow 1 + 2^2 = \frac{1}{\sin^2\theta} \rightarrow 5 = \frac{1}{\sin^2\theta} \rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{5} \rightarrow \boxed{\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

۸

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{5} \rightarrow y = \frac{1 - 2x}{5} \rightarrow 5y = 1 - 2x \rightarrow 2x = 1 - 5y$$

$$\rightarrow x = \frac{1 - 5y}{2} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}y \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}}$$

$$g(x) = -3x + 1 \rightarrow y = -3x + 1 \rightarrow 3x = 1 - y \rightarrow x = \frac{1 - y}{3}$$

$$\rightarrow g^{-1}(y) = \frac{1}{3} - \frac{y}{3} \rightarrow \boxed{g^{-1}(x) = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$3y + 4x + 12 = 0 \rightarrow 4x = -3y - 12 \rightarrow x = \frac{-3y - 12}{4} \rightarrow x = -\frac{3y}{4} - 3$$

$$\rightarrow \boxed{y^{-1} = -\frac{3x}{4} - 3}$$

۹

تابع f یک به یک $\rightarrow (m, 3) = (-1, 3) \rightarrow m = -1$

$$\rightarrow f = \{(-2, 2), (-1, 3), (-2, a)\} \xrightarrow{f \text{ یک به یک}} (-2, 2) = (-2, a) \rightarrow a = 2$$

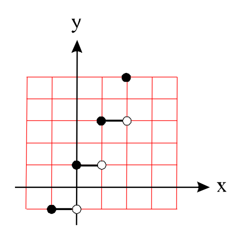
۱۰

$$-1 \le x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = -1$$

$$0 \le x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = 1$$

$$1 \le x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = 3$$

$$x = 2 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow y = 5$$



۱۱

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} \rightarrow x^2 - 6x + 8 \ge 0 \rightarrow (x - 4)(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x^2 - 6x + 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		ج	ج		ج	ج	

$$\rightarrow D_f = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$$

۱۲

$$f(x) = \sqrt{x + 1} \rightarrow f(3) = \sqrt{3 + 1} \rightarrow f(3) = 2$$

$$g(x) = \frac{x + 1}{x - 2} \rightarrow g(3) = \frac{3 + 1}{3 - 2} \rightarrow g(3) = 4$$

$$\rightarrow (2f - g)(3) = 2f(3) - g(3) = 2(2) - 4 \rightarrow \boxed{(2f - g)(3) = 0}$$